第 24 講　図形と方程式(4)

【基礎確認事項】

［１］　不等式の表す領域

□x，y に関する不等式があるとき，それを満たす点 $(x,\ y)$ 全体の集合を，その不等式の表す**領域**という．

例　$y>x-1$ の表す領域について

点 $P(x_1,\ y_1)$ がこの領域にあれば，

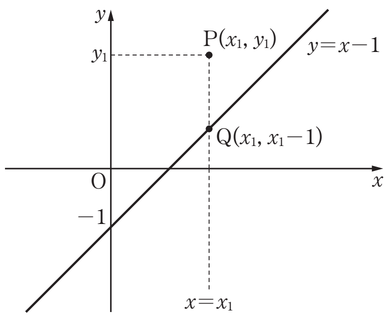
$y_1>x_1-1$

が成り立つ．

また，直線 $x=x_1$ と $y=x-1$ との交点を Q とすると

$Q(x_1,\ x_1-1)$

である．$y_1>x_1-1$ より，点 P は点 Q より上側にある．

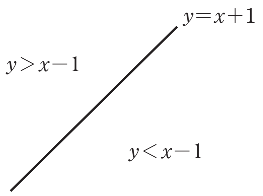


したがって，点 P は直線 $y=x-1$ より上側にある．

同様に，$y<x-1$ の表す領域は，直線　$y=x-1$ より下側にある．

□一般に，直線 $l：y=ax+b$ を境界とする領域について次のことがいえる．

（ⅰ）不等式 $y>ax+b$ の表す領域は，直線 l の上側の部分
（ⅱ）不等式 $y<ax+b$ の表す領域は，直線 l の下側の部分

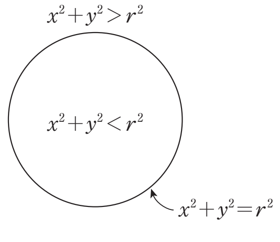


いずれも，境界は含まない．

領域を図示する場合は，境界を含む，含まないについて明記する必要がある．

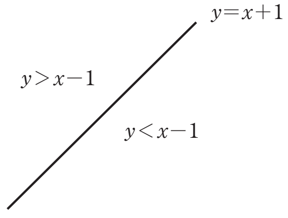
□原点を中心とする半径 r の円 C を境界線とする領域について，次のことがいえる．

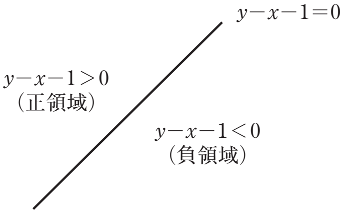
（ⅰ）不等式 $x^2+y^2<r^2$ の表す領域は，円 C の内部
（ⅱ）不等式 $x^2+y^2>r^2$ の表す領域は，円 C の外部

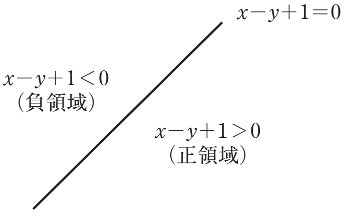


いずれも，境界は含まない．

□一般に $f(x,\ y)>0$ で表される領域を**正領域**，$f(x,\ y)<0$ で表される領域を**負領域**という．不等号の向きと，境界線を境とした領域の上下，内外に注意．







⇒　C&U ①

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

〈 Memo 〉

【CHECK & UP】

1　次の連立不等式が表す領域を図示せよ.

(1) $\begin{cases} y > x+1 \\ y > -x+1 \\ y < 3 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x+2y+2 \leqq 0 \\ y \geqq -x^2-2x \end{cases}$　(3) $\begin{cases} 2x+y-4 < 0 \\ x^2+y^2 \leqq 4 \end{cases}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第24講　図形と方程式(4)

1　$|x|+|y|\leqq 1$ ならば $(x+2y-2)(x^2+y^2-4)\geqq 0$ が成り立つことを証明せよ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　実数 x，y が $x^2+y^2 \leqq 5$，$y \geqq 2x$ を満たすとき，$2x+y$ の最大値と最小値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 (1) 2点をA$(-2,\ -1)$，B$(3,\ 2)$とする．線分ABが直線$y=ax+1$と共有点をもたないとき，定数aの値の範囲を求めよ．

(2) 放物線$y=-x^2+x+2$上の任意の点をP，直線$y=-2x+6$上の任意の点をQとする．このとき，線分PQの長さの最小値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第24講　図形と方程式(4)

連立不等式 $x^2+y^2 \leqq 2$, $y \geqq -x$ で表される領域を D とする．点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が領域 D 内の点であるとき，$3x+4y$ は $x=\dfrac{\boxed{ア}\sqrt{\boxed{イ}}}{\boxed{ウ}}$，$y=\dfrac{\boxed{エ}\sqrt{\boxed{オ}}}{\boxed{ウ}}$ のとき最大値 $\boxed{カ}\sqrt{\boxed{キ}}$ をとり，$x=\boxed{ク}$，$y=-\boxed{ケ}$ のとき最小値 $-\boxed{コ}$ をとる．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

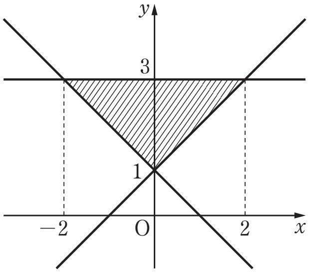
＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 24 講　図形と方程式(4)

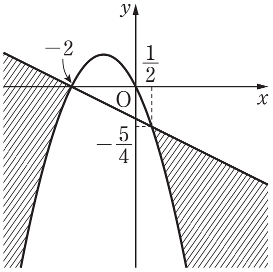
【CHECK & UP】

1 (1)



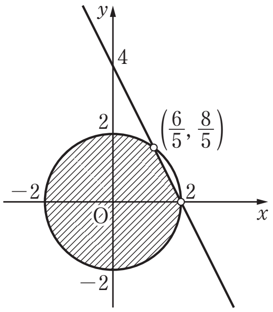
上図斜線部分．ただし境界は含まない．

(2)



上図斜線部分．ただし境界を含む．

(3)



上図斜線部分．ただし境界は，

直線 $2x+y-4=0$ 上の点は含まず，他は含む．

領域を描く練習問題である．境界線を境とした上下，内外を判断して斜線を引く．また，境界を含むか否かは明記すること．

斜線を引く領域については，境界によって区切られた領域のうち「図より明らかにその領域に入っている点」を代入して成立するかどうかを確かめる方法がある．原点などがその代表例であろう．

境界線が複数ある場合は，当然その「交点」が存在する．特に共有点を利用する場合は，境界を表す方程式を連立して解くことで共有点を出す必要がある．左は共有点を書き込んだものである．

この「共有点」を出すことで，境界線のそれぞれの相対的な位置関係が把握できるというメリットもある．それに対し，個々の「切片（x 切片，y 切片）」は使わない場合も少なくない．必要に応じていつでも連立して共有点を出せるようにしておこう．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第24講　図形と方程式(4)

1　$|x|+|y|\leqq 1$ ならば $(x+2y-2)(x^2+y^2-4)\geqq 0$ が成り立つことを証明せよ．

不等式　$|x|+|y|\leqq 1$，$(x+2y-2)(x^2+y^2-4)\geqq 0$　の表す領域をそれぞれP，Qとする．

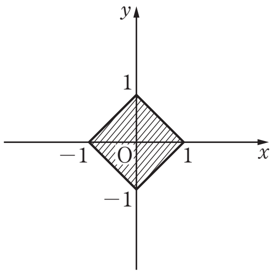
領域Pについて

$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ のとき　$x+y\leqq 1$　つまり　$y\leqq -x+1$

$x\geqq 0$，$y<0$ のとき　$x-y\leqq 1$　つまり　$y\geqq x-1$

$x<0$，$y\geqq 0$ のとき　$-x+y\leqq 1$　つまり　$y\leqq x+1$

$x<0$，$y<0$ のとき　$-x-y\leqq 1$　つまり　$y\geqq -x-1$



よって領域Pは右図斜線部分．ただし，境界を含む．

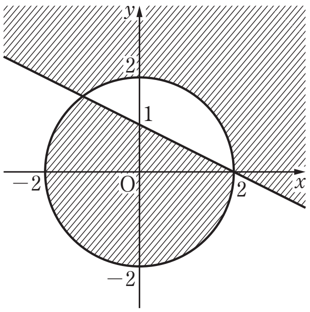
領域Qは

$x+2y-2\geqq 0$　かつ　$x^2+y^2-4\geqq 0$　……①

または　$x+2y-2\leqq 0$　かつ　$x^2+y^2-4\leqq 0$　……②　の表す領域である．

①より　$y\geqq -\dfrac{1}{2}x+1$　かつ　$x^2+y^2\geqq 4$

②より　$y\leqq -\dfrac{1}{2}x+1$　かつ　$x^2+y^2\leqq 4$



よって領域Qは右図斜線部分．ただし，境界を含む．

したがって　$P\subset Q$ が成り立つので，

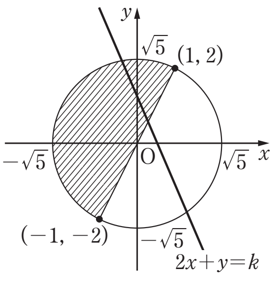
$|x|+|y|\leqq 1$　ならば　$(x+2y-2)(x^2+y^2-4)\geqq 0$　が成り立つ．

2　実数 x，y が $x^2+y^2\leqq 5$，$y\geqq 2x$ を満たすとき，$2x+y$ の最大値と最小値を求めよ．

円 $x^2+y^2=5$ と直線 $y=2x$ の交点は　$(1,\ 2)$，$(-1,\ -2)$

よって　$x^2+y^2\leqq 5$，$y\geqq 2x$ の満たす領域 D は

右図斜線部分．境界を含む．



$2x+y=k$　……①　とおくと，$y=-2x+k$

これは傾き -2，y 切片 k の直線を表す．

この直線①が領域 D と共有点をもつときの y 切片 k の

最大値，最小値を求める．

k が最大となるのは，直線①が点 $(1,\ 2)$ を通るとき．

このとき　$k=2\cdot 1+2=4$

k が最小となるのは，直線①が円 $x^2+y^2=5$ と第3象限で接するとき．

直線①と円の中心 $(0,\ 0)$ の距離が半径 $\sqrt{5}$ と等しくなるときを考えて

$$\frac{|-k|}{\sqrt{4+1}}=\sqrt{5}\qquad |k|=5\qquad よって\quad k=\pm 5$$

第3象限で接するとき　$k<0$　したがって　$k=-5$

このとき直線①と円の接点の座標は，①：$y=-2x-5$ と直線 $y=\dfrac{1}{2}x$ の交点であるので，

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$(-2,\ -1)$　これは領域 D に含まれる.

以上より　**最大値　4**　　**最小値　−5**

3　(1)　2点を $A(-2,\ -1)$, $B(3,\ 2)$ とする. 線分 AB が直線 $y=ax+1$ と共有点をもたないとき, 定数 a の値の範囲を求めよ.

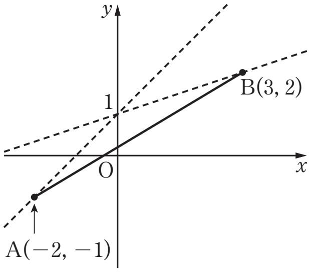
(2)　放物線 $y=-x^2+x+2$ 上の任意の点を P, 直線 $y=-2x+6$ 上の任意の点を Q とする. このとき, 線分 PQ の長さの最小値を求めよ.

---

(1)　直線 $y=ax+1$ が

点 $A(-2,\ -1)$ を通るとき　$a=1$

点 $B(3,\ 2)$ を通るとき　$a=\dfrac{1}{3}$



よって, グラフより　$\boldsymbol{\dfrac{1}{3}<a<1}$

【別解】　$f(x,\ y)=ax-y+1$ とおくと, 2点 A, B が

ともに $f(x,\ y)>0$ の領域にあるか, ともに $f(x,\ y)<0$ の領域にあればよい.

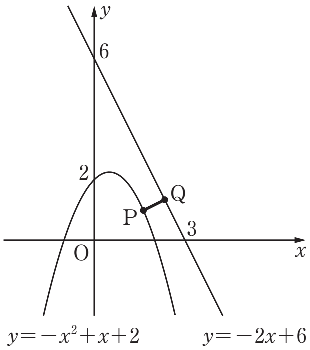
つまり　$f(-2,\ -1)\times f(3,\ 2)>0$

$(-2a+1+1)(3a-2+1)>0$

$(a-1)(3a-1)<0$　　よって　$\boldsymbol{\dfrac{1}{3}<a<1}$

(2)　点 P の座標は $(t,\ -t^2+t+2)$ と表せる.

求める線分 PQ の距離の最小値は, 点 P と直線 $y=-2x+6$　つまり　$2x+y-6=0$ の距離 d の最小値である.



$$d=\frac{|2t-t^2+t+2-6|}{\sqrt{4+1}}=\frac{|-t^2+3t-4|}{\sqrt{5}}$$

ここで図より $P(t,\ -t^2+t+2)$ は領域　$y<-2x+6$

つまり　$2x+y-6<0$ にある.

したがって, $2t-t^2+t+2-6<0$　つまり　$-t^2+3t-4<0$

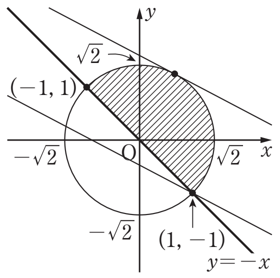
よって　$d=\dfrac{t^2-3t+4}{\sqrt{5}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(t-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{7\sqrt{5}}{20}$

したがって, 求める最小値は　$\boldsymbol{\dfrac{7\sqrt{5}}{20}}$　である.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 24 講　図形と方程式(4)

連立不等式 $x^2+y^2 \leqq 2$，$y \geqq -x$ で表される領域を D とする．点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が領域 D 内の点であるとき，$3x+4y$ は $x=\dfrac{\boxed{ア}\sqrt{\boxed{イ}}}{\boxed{ウ}}$，$y=\dfrac{\boxed{エ}\sqrt{\boxed{オ}}}{\boxed{ウ}}$ のとき最大値 $\boxed{カ}\sqrt{\boxed{キ}}$ をとり，$x=\boxed{ク}$，$y=-\boxed{ケ}$ のとき最小値 $-\boxed{コ}$ をとる．



$x^2+y^2=2$ と $y=-x$ より　$(x,\ y)=(-1,\ 1),\ (1,\ -1)$

よって領域 D は右図斜線部分．境界を含む．

$3x+4y=k$ とおくと，$y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{k}{4}$　……①

よって，傾き $-\dfrac{3}{4}$ の直線①が領域 D と共有点をもつ範囲において，y 切片 $\dfrac{k}{4}$ が最大，最小となるときが，それぞれ k が最大，最小となるときである．

最大となるのは，直線①すなわち　$3x+4y-k=0$ が　円 $x^2+y^2=2$ と第 1 象限で接するときである．中心 $(0,\ 0)$ と直線①の距離が半径 $\sqrt{2}$ と等しいとき

$$\frac{|-k|}{\sqrt{9+16}}=\sqrt{2}\quad \text{より}\quad |k|=5\sqrt{2}\quad \text{よって}\quad k=\pm 5\sqrt{2}$$

第 1 象限で接するとき　$k>0$ より　$k=5\sqrt{2}$

このとき，直線①に垂直で円の中心を通る直線は　$y=\dfrac{4}{3}x$

この直線と直線①：$y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{5\sqrt{2}}{4}$ の交点の座標は　$\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{5},\ \dfrac{4\sqrt{2}}{5}\right)$

最小となるのは，直線①が点 $(1,\ -1)$ を通るときで，最小値は

$$k=3\cdot 1+4\cdot(-1)=-1$$

したがって，$3x+4y$ は

$x=\dfrac{3\sqrt{2}}{5}$，$y=\dfrac{4\sqrt{2}}{5}$ のとき　**最大値** $\mathbf{5\sqrt{2}}$　　$x=\mathbf{1}$，$y=\mathbf{-1}$ のとき　**最小値** $\mathbf{-1}$　をとる．

ⓒRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。